ESPACES DE FONCTIONS PONDERABLES

PAR

ALAIN GOULLET DE RUGY

ABSTRACT

The main theorems solve two problems about weighted spaces $C_0V(T)$ of continuous functions on a completely regular space T. These problems were first raised by W. H. Summers who solved them for the locally compact case. The first theorem gives necessary and sufficient conditions on T for $C_0V(T)$ to be complete for the weighted topology; the second one shows that continuous linear functionals on $C_0V(T)$ can be represented by means of measures on T.

1. Introduction

Soit V un cône de fonctions, appelées poids, s.c.s. et positives sur un espace complètement régulier T. On lui associe l'espace $C_0V(T)$ des fonctions continues f sur T, V-pondérables en ce sens que le produit fv tende vers zéro à l'infini pour chaque poids v, muni d'une topologie d'e.l.c. convenable.

Cette notion abstraite d'espaces de fonctions pondérables (en anglais weighted spaces) a été introduite en 1965 par L. Nachbin en liaison avec le problème d'approximation, [8]. Elle a été approfondie par W. H. Summers dans une série d'articles ([12], [13], [14]) qui a posé et résolu en partie les deux problèmes suivants:

(A) Quand un espace $C_0V(T)$ est-il complet?

(B) Représenter les formes linéaires continues sur un tel espace au moyen de mesures sur T.

Il se trouve que dans un travail sur les M-espaces ([6], [7]), j'ai rencontré les espaces de fonctions V-pondérables dans le cas particulier où V est engendré par un seul poids et j'ai résolu le problème (A) dans ce cas. Les méthodes dévéloppées à cette occasion se transposent au cas général et fournissent une réponse très satisfaisante au problème de la complétion (Théorèmes 3.3 et 3.10).

Quant au problème (B), il se trouve pratiquement résolu dès qu'on a remarqué

Received November 21, 1971

que les espaces $C_0V(T)$ sont des espaces de Kakutani au sens de Portenier ([9]). Par suite, toute forme linéaire continue et positive L sur un espace $C_0V(T)$ est dans un chapeau de $C_0V(T)'_+$. Il reste alors, et c'est ce que je fais au paragraphe 4, à déterminer les points extrémaux de ce chapeau et à utiliser convenablement le théorème de représentation intégrale de Choquet pour obtenir une représentation de la forme linéaire L au moyen d'une mesure sur T.

2. Préliminaires et réduction du problème

2.1. NOTATIONS. Dans toute la suite, T désignera un espace complètement régulier. On notera $C(T)$ l'espace des fonctions numériques continues sur T, $B(T)$ l'espace des fonctions numériques bornées sur T et $B_0(T)$ l'espace des fonctions numériques sur T qui tendent vers zéro suivant le filtre des complémentaires des parties relativement compactes de T. On posera $C_0(T) = C(T) \cap B_0(T)$. Si f est une fonction numérique sur T et S une partie de T, on posera $N(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ et on notera f_S la restriction de f à S. Plus généralement si F est un ensemble de fonctions numériques sur T, on posera $N(F) = \bigcup_{f \in F} N(f)$ et $F_S = \{f_S : f \in F\}$. Enfin, on notera $\| \cdot \|_S$ la norme uniforme sur $B(S)$ et pour $S = T$, on notera simplement $\| \cdot \|$ au lieu $\| \quad \|_T$.

2.2. ESPACES DE FONCTIONS PONDÉRABLES. On appelle *famille de Nachbin* tout cône convexe V de fonctions s.c.s et positives sur T, stable par enveloppe supérieure ponctuelle finie. Si V est une famille de Nachbin, on lui associe l'espaces des fonctions *V-pondérables*:

$$C_0V(T) = \{f \in C(T) : f \cdot v \in B_0(T),\ \forall v \in V\},$$

que l'on muni de la topologie localement convexe ω_V définie par les semi-normes $p_v, (v \in V)$, où:

$$p_v(f) = \|f \cdot v\|, \ (\forall f \in C_0V(T)).$$

Les hypothèses sur V montrent que les ensembles:

$$B_v = \{f \in C_0V(T) : p_v(f) \leqq 1\}, \ (\forall v \in V),$$

constituent un système fondamental B_V de voisinages de l'origine de $C_0V(T)$ pour ω_V. Par ailleurs il est clair que chaque ensemble B_v est *coréticulé*, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété:

(2.2.1.) $$(f, g \in B_v) \Rightarrow (\sup(f, g),\ \inf(f, g) \in B_v),$$

et *solide*, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété:

(2.2.2.) $(f \in B_v,\ g \in C_0V(T) \text{ et } |f| \geqq |g|) \Rightarrow (g \in B_v)$.

REMARQUE. Dans [8] et [12], on supposait seulement que V possédait la propriété suivante: Si $u, v \in V$ et $\lambda \geqq 0$, il existe $w \in V$ avec: $w \geqq \lambda u, \lambda v$. Si on remplace V par son enveloppe convexe conique V', il est clair que l'espace $C_0V(T)$ est inchangé ainsi que la topologie ω_V. Comme par ailleurs le fait de supposer que V est un cône convexe apporte des simplifications à certaines démonstrations, nous avons préféré nous placer d'emblée dans ce cas.

2.3. EXEMPLE. On prend pour V le cône convexe engendré par les fonctions caractéristiques des parties compactes de T. Alors, l'espace $C_0V(T)$ est identique à l'espace $C(T)$ muni de la convergence compacte. Il a été étudié de manière approfondie. Voir H. S. Collins [4] et S. Warner [13].

2.4. REDUCTION DU PROBLÈME. A partir de maintenant V désignera une famille de Nachbin fixée sur T telle que $C_0V(T)$ *soit séparé*. Au §3 de W. H. Summers a indiqué le critère de séparabilité suivant, de démonstration élémentaire:

2.4.1. PROPOSITION. *Pour que $C_0V(T)$ soit séparé, il faut et il suffit que $N(V) \cap N(C_0V(T))$ soit dense dans $N(C_0V(T))$.*

Remarquons, qu'en fait, si $C_0V(T)$ est séparé, $N(V)$ est dense dans T. En effet dans le cas contraire, il existerait, par complète régularité une fonction $f \in C(T)$ non nulle avec $N(f) \cap \overline{N(V)} = \emptyset$. Puisque les poids sont nuls sur $N(f)$, on aurait $f \in C_0V(T)$ et $p_v(f) = 0$, $(\forall v \in V)$, ce qui contredirait la séparation.

On supposera désormais que $N(V)$ est dense dans T. En fait, nous allons voir que les hypothèses:

(S_1) $N(V) = T$,

(S_2) Pour tout $x \in T$, il existe $f \in C_0V(T)$ avec $f(x) \neq 0$, sont raisonnables.

2.4.2. NOTATIONS. (a) Soient $v \in V$ et $f \in C_0V(T)$. On pose:

$$K_v(f) = \{|f| \cdot v \geqq 1\}.$$

C'est un compact contenu dans $N(f) \cap N(v)$.

(b) On note $\mathfrak{S}_V$ la base de filtre formée des sections $s_v = \{u \in V : u \geqq v\}$, $(v \in V)$.

(c) Dans la proposition qui suit, on pose, pour simplifier:

$$Z = N(C_0V(T)) \cap N(V).$$

2.4.3. PROPOSITION. *Si $C_0V(T)$ est séparé et complet, l'application: $f \to f_Z$ est un isomorphisme linéaire bipositif de $C_0V(T)$ sur $C_0V_Z(Z)$.*

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que si $f \in C_0V(T)$, on a:

$$\{|f| \cdot v \geqq r^{-1}\} = K_{rv}(f), \qquad (\forall r > 0).$$

Comme $K_{rv}(f) \subset N(f) \cap N(v) \subset Z$, cette égalité montre que $f_Z \in C_0V_Z(Z)$. Par ailleurs, comme Z est dense dans $N(C_0V(T))$, on a: $(f \geqq 0) \Leftrightarrow (f_Z \geqq 0)$. Cela prouve que l'injection linéaire considérée et injective et bipositive. De plus, il est clair que:

$$p_v(f) = p_{v_Z}(f_Z), \ (\forall v \in V), \ (\forall f \in C_0V(T));$$

par suite, pour conclure à l'isomorphisme il suffit de montrer la surjection. Soit donc $f \in C_0V_Z(Z)_+$. Pour tout v, notons K_v le compact $\{f \cdot v \geqq 1\}$. Par définition de Z, il existe pour tout x dans K_v une fonction $g_x \in C_0V(T)_+$ avec $g_x(x) > f(x) \geqq 0$. En utilisant la compacité de K_v, on en déduit qu'il existe une fonction $g_v \in C_0V(T)_+$ avec $g_v \geqq f$ sur K_v. Notons f' le prolongement de f à T obtenu en posant $f'(t) = 0$ pour tout $t \in (T \backslash Z)$. et posons $h_v = \inf(f', g_v)$. Cette fonction est continue sur Z. De plus, on a $0 \leqq h_v \leqq g_v$, de sorte que h_v est continue en tout point où g_v est nulle. En particulier h_v est continue en tout point de $(T \backslash Z)$. Cette inégalité montre aussi que h_v tend vers zéro à l'infini. Finalement, $h_v \in C_0V(T)_+$. Cela étant, prenons $w \in V$ avec $w \geqq v$. On a:

(i) $$f = h_w = h_v \text{ sur } K_v \cup f^{-1}(0)$$

(ii) $$|h_w - h_v| \cdot v \leqq 2 \text{ hors de } K_v.$$

Ainsi: $$p_v(h_w - h_v) \leqq 2.$$

Comme V est un cône, cela prouve que la famille (h_v) filtrée par $\mathfrak{S}_V$ est une base de filtre de Cauchy dans $C_0V(T)$. Comme ce dernier est complet il possède une limite h dans $C_0V(T)$. Comme la topologie ω_V est plus fine que la topologie de la convergence simple sur Z, on a, compte tenu de (i), que $h = f$ sur $f^{-1}(0)$ et sur les ensembles K_v. Comme $Z \subset N(V)$, la réunion des K_v est égale à $N(f)$. Ainsi, $h_Z = f$, ce qui achève la démonstration.

2.4.4. COROLLAIRE. *Tout espace de fonctions pondérables $C_0V(T)$ séparé et complet est isomorphe à un espace de fonctions pondérables $C_0V'(T')$ vérifiant les propriétés (S_1) et (S_2).*

3. Le problème de la completion

Nous supposerons désormais que V est une famille de Nachbin pour laquelle (S_1) et (S_2) soient vérifiés. La propriété (S_1) peut se traduire en disant que la topologie ω_V est plus fine que la topologie de la convergence simple sur T et (S_2) en disant que la topologie initiale associée aux fonctions de $C_0V(T)$ est identique à la topologie donnée sur T.

3.1. NOTATIONS. Pour tout $v \in V$, on pose: $F_v = \{v \geqq 1\}$, et on note $\mathscr{F}_V$ l'ensemble de ces fermés. On notera que, comme V est un cône, $\mathscr{F}_V$ contient aussi les ensembles de la forme $\{v \geqq r\}$, $(\forall r > 0)$. On note $\mathscr{K}_V$ l'ensemble des parties compactes de T contenues dans un ensemble de $\mathscr{F}_V$ au moins.

3.2. LEMMA. *Soient $x \in T$ et U un voisinage ouvert de x dans T. Alors, il existe un voisinage U' de x et une fonction $f \in C_0V(T)$ tels que:*

(a) $0 \leqq f \leqq 1$ *et* $f = 1$ *sur* U' *et* $f = 0$ *hors de* U;

(b) $\bar{U}' \subset U$.

DÉMONSTRATION. D'après (S_2), il existe $g \in C_0V(T)_+$ tel que $g(x) > 1$. Par complète régularité, il existe $h \in C(T)$ avec $0 \leqq h \leqq 2$, $h(x) > 1$ et $h = 0$ hors de U. La fonction $f = \inf(h, g, 1)$ associée au voisinage $U' = \{h \geqq 1\}$ convient.

3.3. THÉORÈME. *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(a) *$C_0V(T)$ est complet*

($C\mathscr{K}_V$) (respectivement ($C\mathscr{F}_V$)) Une fonction numérique sur T est continue dès que sa restriction à chaque ensemble de $\mathscr{K}_V$ (respectivement de $\mathscr{F}_V$) est continue.

DÉMONSTRATION. D'abord, notons que $(C\mathscr{K}_V) \Rightarrow (C\mathscr{F}_V)$. Montrons que $(C\mathscr{F}_V) \Rightarrow$ (a). Si $v \in V$, on a:

(3.3.1.) $$p_v(f) \geqq \|f_{F_V}\|_{F_V}, \quad (\forall f \in C_0V(T)).$$

Par ailleurs, soit $\mathscr{U}$ un filtre de Cauchy sur $C_0V(T)$. D'après (S_1), ce filtre converge simplement vers une fonction numérique f sur T. Cela étant, d'après (3.3.1), f est continue sur chaque ensemble de $\mathscr{F}_V$, donc sur T d'après ($C\mathscr{F}_V$). Ainsi, $f \in C_0V(T)$, ce qui prouve que $C_0V(T)$ est complet

Montrons enfin que (a) $\Rightarrow$ ($C\mathscr{K}_V$). Notons d'abord qu'il suffit de montrer ($C\mathscr{K}_V$) pour une fonction numérique positive bornée sur T. Soient donc f une fonction numérique sur T telle que $0 \leqq f \leqq 1$, dont la restriction à chaque ensemble de $\mathscr{K}_V$ est continue et $x \in T$. D'après le Lemme 3.2, il existe un voisinage ouvert U de x et une fonction $g \in C_0V(T)$ telle que: $0 \leqq g \leqq 1$ et que $g = 1$ sur U. Soit $v \in V$. Notons ϕ le produit g.f et ϕ_v la restriction de ϕ au compact $K_v(g)$. Par hypothèse la restriction de f à $K_v(g)$ est continue. Ainsi, ϕ_v est continue sur $K_v(g)$. Comme $0 \leqq \phi_v \leqq g$ sur $K_v(g)$ et comme T est complètement régulier, il existe une fonction $\psi_v \in C(T)$ telle que:

(i) $0 \leqq \psi_v \leqq g$,

(ii) $\psi_v = \phi_v$ sur $K_v(g)$.

De (i) on déduit $\psi_v \in C_0V(T)$. Soit maintenant w un poids supérieur ou égal à v. On a:

$$\phi = \psi_w = \psi_v \text{ sur } K_v(g)$$

$$|\psi_w - \psi_v| \cdot v \leqq 2v \cdot g \leqq 2 \text{ hors de } K_v(g).$$

Ainsi:

$$p_v(\psi_w - \psi_v) \leqq 2.$$

Comme V est un cône, cela exprime que la famille (ψ_v) filtrée par $\mathfrak{S}_V$ (cf. 2.4.2 (b)) est une base de filtre de Cauchy dans $C_0V(T)$. Comme, par hypothèse, cet espace est complet, cette famille a une limite f', qui est aussi sa limite simple. Ainsi, $f' = \phi = f$ sur U de sorte que f est continue en x. Ce point étant arbitraire, f est continue sur T, ce qui prouve $(C\mathscr{K}_V)$.

3.4. DÉFINITION. On dit que T est un *k_R-espace* si la propriété suivante est vérifiée:

(K_R) Une fonction numérique sur T est continue dès que sa restriction à chaque partie compacte de T est continue.

On dit que T est un *k-espace* si la propriété suivante est vérifiée:

(K) Une partie F de T est fermée dès que sa restriction à chaque partie compacte de T est fermée.

Il est bien connu que la propriété (K) équivaut à: une fonction sur T à valeurs dans un espace topologique séparé est continue dès que sa restriction à chaque partie compacte de T est continue.

3.5. DEFINITION. On dit qu'une famille $\mathscr{F}$ de parties de T est *compactivore* si toute partie compacte de T est contenue dans un ensemble de $\mathscr{F}$.

3.6. COROLLAIRE. *Si la famille $\mathscr{F}_V$ est compactivore, $C_0V(T)$ est complet si et seulement si T est un k_R-espace.*

REMARQUE. Ce corollaire constitue une réciproque au corollaire 3.7 de [12].

Rappelons que, dans [6], nous avions montré que lorsque V était engendré par un seul poids, la famille $\mathscr{F}_V$ était nécessairement compactivore. Cela correspondait au cas où $C_0V(T)$ était un espace de Banach. Nous allons sensiblement améliorer ce résultat en l'étendant au cas où $C_0V(T)$ est métrisable. Auparavant posons une définition et faisons un rappel:

3.7. DÉFINITION. On dit qu'un partie W de V est *linéairement cofinale à* V si pour tout $v \in V$, il existe un $w \in W$ et un $r > 0$ tels que: $v \leqq rw$.

3.7.1. LEMME. *Si* (v_n) *est une suite croissante de poids linéairement cofinale à* V, *les ensembles* $F_n = \{v_n \geqq 1/n\}$, $(n \geqq 1)$ *sont dans* $\mathscr{F}_V$ *et chaque ensemble de* $\mathscr{F}_V$ *est contenu dans un des* F_n.

DÉMONSTRATION. Comme V est un cône, on a $(1/n)v_n \in V$ et:

$$F_n = F_{1/nv_n} \in \mathscr{F}_V.$$

Si v est un poids, il existe un réel $r > 0$ tel que $v \leqq rv_n$. Soit m un entier $\geqq n$ tel que $r \leqq m$. Comme la suite (v_n) est croissante, on a:

$$\{v < 1\} \supset \{rv_n < 1\} \supset \{mv_m < 1\},$$

D'où: $F_m \supset \{v \leqq 1\} = F_v$.

Rappelons maintenant le résultat suivant:

3.8. PROPOSITION. (Summers [14], théorème 4.1). Un espace $C_0V(T)$ est métrisable si et seulement si, il existe une partie dénombrable de V linéairement cofinale à V.

3.9. LEMME. *Si* $C_0V(T)$ *est métrisable et complet, la famille* $\mathscr{F}_V$ *est compactivore.*

DÉMONSTRATION. Choisissons une famile dénombrable croissante (v_n) de poids linéairement cofinale à V et notons:

$$F_n = \{v_n \geqq 1/n\}, \ (\forall n \geqq 1).$$

Soit K une partie compacte de T. Supposons que $K \cap (T \backslash F_n)$ soit non vide pour tout entier $n \geqq 1$. Alors, on peut prendre un point x_n dedans. La suite (x_n) possède au moins un point adhérent x dans K. En tronquant au besoin la suite, on peut supposer que $x \neq x_n$ $(\forall n \geqq 1)$, de sorte que par complète régularité, il existe une suite (f_n) de fonctions de $C(T)$ telles que:

(i) $0 \leqq f_n \leqq 1$,
(ii) $f_n(x_{n+1}) = 1$,
(iii) $f_n(x) = 0$,
(iv) $f_n = 0$ sur F_n $(\forall n \geqq 1)$.

La dernière condition permet de dire que la fonction $f = \sum_1^{+\infty} f_n$ a un sens et que sa restriction à chaque F_n est continue comme somme d'un nombre fini de fonctions continues. D'après le Lemme 3.7.1, la restriction de f à chaque ensemble de $\mathscr{F}_V$ est continue. Comme $C_0V(T)$ est complet, il résulte de la propriété $(C\mathscr{F}_V)$ du Théorème 3.3 que f est continue. On a donc:

$$0 = f(x) = \lim f(x_n) \geqq \lim f_n(x_{n+1}) = 1,$$

ce qui est absurde. Ainsi, la suite (F_n) est compactivore. Du Lemma 3.7.1, il en résulte, à fortiori, que la famille $\mathscr{F}_V$ est compactivore.

3.10. THÉORÈME. *Si $C_0V(T)$ est métrisable, les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(a) *$C_0V(T)$ est complet;*

(b) *(respectivement* (b')) *T est un k_R-espace (respectivement un k-espace) et la famille $\mathscr{F}_V$ est compactivore;*

(c) *(respectivement* (c')) *Une partie F de T est fermée dès que sa trace sur chaque ensemble de $\mathscr{K}_V$ (respectivement $\mathscr{F}_V$) est fermée.*

DÉMONSTRATION. L'équivalence de (a) et (b) résulte du Corollaire 3.6 et du Lemme 3.9. Par ailleurs, on a trivialement que (b') $\Rightarrow$ (b). Puis, avec le Théorème 3.3, on a (c) $\Rightarrow$ $(C\mathscr{K}_V)$ $\Rightarrow$ (a). Montrons que (c') $\Rightarrow$ (c). Soit F une partie de T dont la trace sur chaque ensemble de $\mathscr{K}_V$ soit fermée. Fixons $x \in T$. D'après le Lemme 3.2, il existe un voisinage fermé U de x et une fonction $f \in C_0V(T)$ telle que $0 \leqq f \leqq 1$ et que $f = 1$ sur U. Alors, si $v \in V$, on a:

$$F_v \cap U = K_v(f) \cap U\,.$$

D'où:

$$(F \cap U) \cap F_v = (F \cap U) \cap K_v(f).$$

Ainsi, l'ensemble $F \cap U$ a sa trace sur chaque ensemble de $\mathscr{F}_V$ fermée. D'après (c'), $F \cap U$ est fermé. Ainsi, F est localement fermé. Il est donc fermé. Pour terminer, montrons que (a) $\Rightarrow$ (c'). Choisissons une suite croissante (v_n) de poids linéairement cofinale à V et notons $F_n = \{v_n \geqq 1/n\}$, $(\forall n \geqq 1)$. Soit A une partie de T dont la trace sur chaque ensemble de $\mathscr{F}_V$ est fermée. En particulier, sa trace sur chaque ensemble F_n est fermée. Pour prouver que A est fermé, il suffit de montrer que, pour tout $x \notin A$, il existe un fermé B contenant A et ne rencontrant pas x. Fixons $x \notin A$. Alors, $x \in F_m$ pour un certain entier m d'après (S_1). Pour simplifier, nous supposons que $m = 1$. Cela étant, d'après le Lemme 3.2, il existe deux fonctions $g, g' \in C_0V(T)$ telles que $0 \leqq g, g' \leqq 1$, que $U = \{g = 1\}$ et $U' = \{g' = 1\}$ soient des voisinages de x et que $N(g) \subset U'$. Posons:

$$G_n = F_n \cap U', \ (\forall n \geqq 1).$$

Comme:

$$G_n = F_n \cap U' = K_{nv_n}(g') \cap U',$$

l'ensemble G_n est compact ($\forall n \geqq 1$). Cela étant, nous affirmons qu'il existe une suite (f_n) de fonctions numériques continues sur T telles que:

(i) $0 \leqq f_n \leqq 1$,
(ii) $f_n = 0$ sur $G_n \cap A$
(iii) $f_n(x) = 1$,
(iv) $f_n = f_{n-1}$ sur G_{n-1} ($\forall n \geqq 2$).

Procédons par récurrence. Pour $n = 1$, considérons la fonction h définie sur le compact $\{x\} \cap (A \cap G_1)$ par $h(x) = 1$ et $h(y) = 0$ pour tout $y \in A \cap G_1$. Elle est continue. Par complète régularité, elle se prolonge en une fonction $f_1 \in C(T)$ vérifiant (i), (ii) et (iii) pour $n = 1$. Supposons la suite (f_p) construite jusqu'au rang m et construisons f_n, où on a posé $n = m + 1$. Soit h la fonction définie sur le compact $(A \cap G_n) \cup G_m$ par $h = f_m$ sur G_m et $h = 0$ sur $A \cap G_n$. Comme $A \cap G_n$ est fermé, cette fonction est continue. Elle admet donc un prolongement f_n à T, continu, vérifiant les conditions voulues. Ainsi la suite (f_n) existe bien. De la propriété (iv), il résulte que la fonction $f = \lim f_n$ a un sens sur $U' = \bigcup_n G_n$ et qu'elle est continue sur chaque ensemble G_n. Par suite, la fonction f' égale à f.g sur U' et à zéro en dehors est bien définie et, puisque $N(g) \subset U'$, elle est continue sur chaque ensemble F_n. Comme la suite (v_n) est linéairement cofinale à V, il résulte du Lemme 3.7.1 que f' a sa restriction à chaque ensemble de $\mathscr{F}_V$ continue. Comme, par hypothèse $C_0V(T)$ est complet, il résulte de la propriété $(C\mathscr{F}_V)$ que la fonction f' est continue. Finalement de (i), (ii) et (iii) on déduit que le fermé $B = \{f' \leqq \frac{1}{2}\} \cap (T \setminus U)$ convient.

La condition que la famille $\mathscr{F}_V$ est compactivore peut se traduire en disant que, pour toute partie compacte K de T, il existe un poids minoré sur K par une constante strictement positive. Cette remarque conduit, par exemple, à l'énoncé suivant:

3.11. Corollaire. *On suppose que T est localement compact et que $C_0V(T)$ est métrisable. Alors, pour que $C_0V(T)$ soit complet, il faut et il suffit que:*

Pour tout $x \in T$, il existe un poids $v \in V$ et un réel $r > 0$ tel que v soit minoré par r dans un voisinage de x.

3.12. Exemple. Soit T un espace métrisable et $\mathfrak{S}$ l'ensemble des suites convergentes sur T. A chaque $\sigma \in \mathfrak{S}$, on associe le compact K_σ réunion des points de σ et de sa limite et on prend pour V le cône convexe engendré par les fonctions caractéristiques des K_σ. Il est clair que $C_0V(T)$ est égal à $C(T)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les ensembles K_σ. De plus, $C_0V(T)$ est complet. Cependant, la famille $\mathscr{F}_V$ n'est pas en général compactivore. Cet espace est métrisable si et seulement si T est dénombrable.

REMARQUE. Si on applique ces résultats à l'espace $C(T)$ muni de la topologie de la convergence compacte (Exemple 2.3), auquel cas $\mathscr{F}_V = \mathscr{K}_V$, on retrouve des résultats bien connus pour ces espaces. Ainsi, le Théorème 3.3 montre que $C(T)$ est complet si et seulement si T est un k_R-espace ([15], théorème 1). Disons que T est *hémicompact* s'il est la réunion d'une suite compactivore de parties compactes. La Proposition 3.8 et le Lemme 3.7.1 redonnent le théorème d'Arens suivant (cf. [15], théorème A): $C(T)$ est métrisable si et seulement si T est hémicompact. Le Théorème 3.10 montre que $C(T)$ est un espace de Fréchet si et seulement si T est un k-espace hémicompact ([15], théorème 2). De plus, l'équivalence de (b) et (b′) montre qu'un k_R-espace hémicompact est en fait un k-espace (cf. par exemple [2], théorème 3.3).

4. Représentation des formes linéaires continues

On suppose toujours que V est une famille de Nachbin sur un espace complètement régulier. Pour simplifier, on pose $E = C_0V(T)$ et on note E' son dual topologique, muni de la topologie faible et $P(E)$ l'ensemble des éléments positifs de E'. Comme l'origine possède un système fondamental de voisinages solides, on a: $E' = P(E) - P(E)$.

W. H. Summers, a, lorsque T est localement compact, représenté les éléments de E' au moyen de mesures de Radon sur T. Lorsque T est un espace complètement régulier quelconque, nous allons obtenir une représentation analogue au moyen des mesures bornées sur T, au sens de Bourbaki, (c'est-à-dire des mesures de Radon sur le compactifié de Čech de T, portées par un K_σ de T).

4.1. NOTATIONS. On note $P(E)_g$ la réunion des génératrices extrémales de $P(E)$. Par ailleurs, pour $v \in V$, on note C_v la partie positive du polaire du voisinage B_v de l'origine dans E (cf. 2.2) et j_v la jauge de C_v dans E'.

Rappelons que l'ensemble $P(E)_g$ est caractérisé par la propriété suivante (cf. [11], chap. V, 1.7):

4.2. LEMME. *Un élément L de $P(E)$ est dans $P(E)_g$ si, et seulement si:*

$$L\,(\sup(f,g)) = \sup\,(L(f), L(g)), \quad (\forall f, g \in E). \tag{4.2.1}$$

Il en résulte immédiatement que $P(E)_g$ est fermé. Nous allons maintenant déterminer explicitement les éléments de $P(E)_g$. Les deux énoncés qui suivent ont été montré par C. Portenier dans un cadre fort général (cf. [10], 2.12, 2.16 et 3.9). Pour la commodité du lecteur, il nous a paru bon d'en donner une démonstration indépendante, au demeurant fort naturelle.

4.3. LEMME. *Soit I un idéal d'ordre fermé de $C_0V(T)$. Posons:*

$$T_I = \cup \{N(g), g \in I_+\},$$

Alors,

$$I = \{f \in C_0V(T) : f = 0 \text{ hors de } T_I\} \tag{4.3.2}$$

DÉMONSTRATION. Soit $f \in C_0V(T)$ nulle hors de T_1. Comme f_+ et f_- sont aussi dans $C_0V(T)$, on peut se restreindre à f positive. Soit $v \in V$. On a $K_v(f) \subset T_I$. Il existe donc $g_v \in I_+$ telle que $g_v \geqq f$ sur $K_v(f)$. Posons $h_v = \inf(f, g_v)$. Comme T est un idéal d'ordre, $h_v \in I$. De plus,

(i) $h_v = f$ sur $K_v(f)$

(ii) $|h_v - f| \cdot v \leqq 2f \cdot v \leqq 2$ hors de $K_v(f)$.

Si maintenant $\varepsilon > 0$ est fixé et si fait la construction précédente pour le poids $v' = \varepsilon^{-1}v$, on déduit de (i) et (ii) que $p_v(h_{v'} - f) \leqq 2\varepsilon$. Ainsi, f est adhérente à I, d'où $f \in I$.

4.4. PROPOSITION. $P(E)_g = \{r\delta(x) : r \geqq 0, x \in T\}$, *ou $\delta(x)$ désigne l'évaluation au point x de T.*

DÉMONSTRATION. Notons A le second membre de l'égalité de l'énoncé. L'égalité (4.2.1) montre que $A \subset P(E)_g$. Cette égalité montre aussi que si $L \in P(E)_g$, son noyau est un idéal d'ordre fermé I de codimension 1. Par le lemme précédent et la propriété (S_2) T_I est égal au complémentaire d'un point x dans T. Les formes linéaires $\delta(x)$ et L ayant même noyau, on a $L = r\delta(x)$ pour un $r \geqq 0$.

Nous pouvons maintenant déterminer l'ensemble $\mathscr{E}(C_v)$ des points extrémaux de C_v. Notons d'abord que, puisque B_v est solide et coréticulé, C_v est un chapeau de $P(E)$ (cf. par exemple [9], corollaire 1.16). Par suite, on a (cf. [3], proposition 30.21):

$$\mathscr{E}(C_v) = (P(E)_g \cap \{j_v = 1\}) \cup \{0\}. \tag{4.4.1}$$

4.5. COROLLAIRE. *Pour tout $v \in V$, on a:* $\mathscr{E}(C_v) = \{v(x)\delta(x) : x \in N(v)\} \cup \{0\}$.

DÉMONSTRATION. Compte tenu de la proposition précédente et de l'égalité

(4.4.1) il s'agit de montrer que, pour tout $x \in N(v)$, on a $j_v(v(x)\delta(x)) = 1$, ou encore que:

(4.5.1) $$\sup_{f \in B_v} f(x) = v^{-1}(x).$$

Fixons $x \in N(v)$ et posons $v' = v^{-1}$. D'après (S_2), il existe $g \in C_0V(T)_+$ avec $g(x) \geqq v'(x)$. D'autre part, comme v' est s.c.i. sur T, qui est complètement régulier, il existe, pour $\varepsilon > 0$ fixé, une fonction $h_\varepsilon \in C(T)_+$ avec:

(i) $0 \leqq h_\varepsilon \leqq v'$,

(ii) $h_\varepsilon(x) \geqq v'(x) - \varepsilon$.

Si on considère $f = \inf(g, h_\varepsilon)$, on a $f \in C_0V(T)_+, f \leqq v'$, d'où $f \in B_v$, et $f(x) \geqq v'(x) - \varepsilon$. Le choix de ε étant arbitraire, on a prouvé (4.5.1).

4.6. Rappels. Soit X un convexe compact. On note $\mathscr{M}_1^+(X)$ l'ensemble des mesures de Radon positives de masse 1 sur X et $A_c(X)$ (respectivement $A_s(X)$) l'espace des fonctions affines continues (respectivement s.c.s.) sur X. On sait (cf. par exemple [3], 26.3) qu'à toute mesure $\theta \in \mathscr{M}_1(X)$, correspond un unique $x \in X$, appelé *résultante* de θ, tel que: $\theta(f) = f(x)$, pour tout $f \in A_c(X)$. En fait, si x est la résultante d'une mesure $\theta \in \mathscr{M}_1^+(T)$, on peut montrer que (cf. [5], lemma 5.11):

(4.6.1) $$\theta(f) = f(x), \ (\forall f \in A_s(X)).$$

4.7. Propositions. (Rogalski). *Soit $v \in V$. Alors, pour tout $L \in C_v$, il existe une mesure de Radon positive μ, portée par $\mathscr{E}(C_v)_* = \mathscr{E}(C_v) - \{0\}$, telle que $\mu(1) = j_v(L)$ et que:*

$$\mu(f) = f(L), \ (\forall f \in A_c(C_v) : f(0) = 0).$$

Démonstration. Par homothétie, on se ramène au cas où $j_v(L) = 1$. Posons $K = C_v \cap P(E)_g$. On sait (cf. [3], proposition 26.4) qu'il existe une mesure $\mu \in \mathscr{M}_1^+(C_v)$, portée par K, de résultante L. Par ailleurs, comme C_v est un chapeau, j_v est affine et s.c.i. sur C_v. Par (4.6.1), on a:

$$\mu(j_v) = j_v(L) = 1.$$

Comme μ est de masse 1 et comme $j_v \leqq 1$ sur C_v, μ est portée par le G_δ $\{j_v = 1\}$. Ainsi, μ est portée par $\{j_v = 1\} \cap P(E)_g$, donc par $\mathscr{E}(C_v)_*$ d'après (4.4.1).

4.8. Lemme. *Soit $v \in V$. Notons Δ_v l'application: $x \to v(x)\delta(x)$ définie sur $N(v)$ et à valeurs dans $\mathscr{E}(C_v)_*$. Alors, si K est un compact de $\mathscr{E}(C_v)_*$, l'ensemble $K' = \Delta_v^{-1}(K)$ est compact et la restriction de v à K' est continue.*

DÉMONSTRATION. Soient $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur K', $\mathcal{V}=\Delta_v(\mathcal{U})$, $f\in C_0V(T)$, (considérée comme forme linéaire continue sur E') et $z\in N(v)$ tel que $v(z)\delta(z) = \lim \mathcal{V}$. On a:

$$\lim_{\mathcal{U}} fo\Delta_v = \lim_{\mathcal{U}} v.f,$$

$$\lim_{\mathcal{U}} fo\Delta_v = f(\lim_{\mathcal{U}} \Delta_v) = v(z)f(z),$$

D'où:

$$v(z)f(z) = \lim_{\mathcal{U}} v.f \quad (4.8.1).$$

D'autre part, l'origine 0 est un point extrémal de C_v et K est un compact de C_v ne rencontrant pas 0. De la proposition 25.13 de [3], il résulte qu'il existe $g\in C_0V(T)_+$ et une constante $r>0$ tels que:

$$v(x)g(x)\geqq r, \ (\forall x\in K').$$

Autrement dit, si on pose $r'=r^{-1}$, $K'\subset K_{r'v}(g)$. Comme v est s.c.s. v est majorée par une constante s sur le compact $K_{r'v}(g)$, donc sur K'. De (4.8.1), on déduit que:

(4.8.2) $$v(z)f(z)=\lim_{\mathcal{U}} v.f\leqq s.\lim_{\mathcal{U}} f.$$

Si $\mathcal{U}$ ne convergeait pas vers z, il existerait par complète régularité et compte tenu du Lemme 3.2, une fonction $h\in C_0V(T)$ avec $0\leqq h\leqq 1$, $h=1$ au voisinage de z et $\lim_{\mathcal{U}} h=0$. L'inégalité (4.8.2) appliquée à h donnerait $v(z)=0$, ce qui serait absurde puisque $z\in K_{r'v}(g)\subset N(v)$. Cela prouve que K' est compact. Cela prouve aussi, avec l'égalité (4.8.1) que le produit $v.f$ est continu sur K'. Comme, avec le Lemme 3.2 on peut prendre f égale à 1 sur K', v est continu sur K'.

4.9. THÉORÈME. *Soit V une famille de Nachbin sur un espace complètement régulier T, vérifiant les propriétés* (S_1) *et* (S_2). *Alors, pour toute forme linéaire continue sur l'espace $C_0V(T)$, il existe une mesure bornée sur T, positive si L est positive, et un poids $v\in V$ tel que:*

(4.9.1) $$l(f)=\theta(v.f) \ \textit{pour toute}\ f\in C_0V(T).$$

DÉMONSTRATION. Nous reprenons les notations de 4.1. Soient $L\in P(E)$ et v un poids tel que $L(f)\leqq 1$ pour tout $f\in B_v$. Alors, L est dans le chapeau C_v. D'après la proposition 4.7, il existe une mesure de Radon positive μ, de masse $j_v(L)$ sur C_v, portée par $\mathscr{E}(C_v)_*$ telle que:

(4.9.2) $$L(f)=\mu(f), \ (\forall f\in E).$$

Comme μ est portée par $\mathscr{E}(C_v)_*$, il existe une suite (K_n) de compacts de $\mathscr{E}(C_v)_*$, dont la réunion porte μ. Posons $K_n=\Delta^{-1}(K_n)$ pour tout entier $n\geqq 0$. D'après la proposition précédente, la restriction de Δ_v à chaque K_n est continue. Il résulte alors de [1], chap. IX, §2, proposition 2, qu'il existe une mesure bornée positive θ sur T telle que $\Delta_v(\theta) = \mu$, soit, compte tenu de (4.9.2):

$$L(f) = \mu(f) = \theta(f.v), \quad (\forall f \in C_0V(T)).$$

Si maintenant on ne suppose plus que L est positive, on voit comme plus haut que $L_+ \in C_{u'}$ et que $L_- \in C_{u'}$ pour deux poids convenables u et u'. Si on considère $v = \sup(u, u')$, on a L_+, $L_- \in C_v$. Il suffit alors de représenter L_+ et L_- dans le chapeau C_v pour obtenir le résultat.

REMARQUE. C. Portenier vient de m'indiquer qu'on peut déduire le Théorème 4.9 de résultats fort généraux de représentation des formes linéaires sur un espace de sections qu'il décrit dans: Formes linéaires positives et mesures (Séminaire Choquet, Intiation a l'Analyse, 10^e année, 1970–1971, Comm. no. 6).

BJBLIOGRAPHIE

1. N. BOURBAKI, *Intégration*, Chapitre 9, Hermann, Paris, (1969), A. S. I. 1343.

2. H. BOUCHWALTER, *Produit topologique, produit tensoriel et c-repletion*, Publ. Dep. Math. (Lyon), 1970–1971.

3. G. CHOQUET, *Lectures on Analysis*, Volume II, W. A. Benjamin, New York, 1969.

4. H. S. COLLINS, *Completeness, full-completeness and k-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 832–835.

5. A. GOULLET DE RUGY, *Géométrie des simplexes*, Paris, C. D. U. et S. E. D. E. S. réunis (1968).

6. A. GOULLET DE RUGY, *Quelques M-espaces concrèts*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A. **273** (1971), 109–112.

7. A. GOULLET DE RUGY, *La structure idéale des M-espaces*, A paraître au J. Math. Pures Appl.

8. L. NACHBIN, *Weighted approximation for algebras and modules of continuous functions: real and self-adjoint complex cases*, Ann. of Math. **81** (1965), 289–302.

9. C. PORTENIER, *Espaces de Riesz, espaces de fonctions et espaces de sections*, Comment. Math. Helv. **46** (1971), 289–313.

10. C. PORTENIER, *Caractérisations de certains espaces de Riesz*, Séminaire d'Initiation à l'Analyse, 10^e année, secrétariat mathématique, Paris, 1970–1971.

11. H. SCHAEFER, *Topological vector spaces*, second edition, Macmillan, New-York, 1966.

12. W. H. SUMMERS, *A representation theorem for biequicontinuous completed tensor products of weighted spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **146** (1969), 121–131

13. W. H. SUMMERS, *Dual spaces of weighted spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **151** (1970), 323–333.

14. W. H. SUMMERS, *Full-completeness in weighted spaces*, Canad. J. Math. **22** (1970), 1196–1207.

15. S. WARNER, *The topology of compact convergence on continuous function spaces*, Duke Math. J. **25** (1958), 265–282.

UNIVERSITÉ DE PARIS VI—MATHÉMATIQUES
9, QUAI SAINT BERNARD
75-PARIS-5^e FRANCE